**Для отчета по гранту РФФИ-РЖД 2013-2014**

Уточнение координат точек попадания лазера при угловых смещениях в различных системах координат

Левашев С.П.

***Введение***

В данной статье рассматривается уточнение координат точек попадания лазера в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат.

***1. Декартова прямоугольная система координат***

Рассмотрим декартову прямоугольную систему координат . В качестве начала координат возьмём точку *O*, которая лежит в горизонтальной плоскости посередине между колёсами. Пусть ось *Y* параллельна продольной оси вагона, ось *X* перпендикулярна ней. Ось *Z* перпендикулярна плоскости *XOY* и направлена вверх.

Считаем, что лазер жёстко закреплён на вершине локомотива так, что приёмный элемент лазера находится в плоскости *XOZ*. Можно указать координаты лазерного приёмника как (*x*0,*y*0,*z*0).

Сканирование будет осуществляться в плоскости XOZ движениями лазера вверх-вниз. Тогда - расстояние от лазера до середины вагона,,  - высота подвеса лазера.

Погрешности в результаты измерений вносят линейные и угловые колебания локомотива. Эти колебания связаны со многими причинами, например: неровностью полотна, наклонами, неравномерностью тяги и т.д. При этом величина ошибки измерения в общем случае растет с ростом расстояния до сканируемого объекта, а в тех случаях, когда луч в результате случайного колебания выходит за границы объекта, то получается попросту ложное измерение.

Будем считать, что для учета и вычисления поправок, компенсирующих указанные колебания, система лазерного сканирования оборудована шестью акселерометрами, измеряющими действующие на сканер три линейных и три угловых ускорения относительно введенных осей координат.

Пусть , ,  - функции линейных смещений лазера вдоль осей ,  и  соответственно, которые формируются с помощью линейных акселерометров; , ,  - функции угловых смещений лазера вокруг осей ,  и , получаемые по данным угловых акселерометров. Поскольку поезд движется, то относительно не подвижной системы координат меняется положение локомотива. Тогда в момент времени  координаты лазерного сканера в неподвижной системе координат равны .

Нам пока известны только три показателя акселерометра: угловые смещения , , .

Пусть направление излучения лазерного луча в неподвижной системе координат без учёта смещений задается вектором  единичной длины, . Тогда  и .

Как показано в [1], истинное положение лазера с учётом смещений равно:



где

 . 

Пусть  - расстояние от лазерного сканера до объекта, куда дотянулся лазерный луч.

Тогда координаты точки попадания лазерного луча равны:



***2. Цилиндрическая система координат***

Рассмотрим цилиндрическую систему координат . Будем считать, что лазер закреплён и движется так, как и в декартовой системе координат. Тогда координаты точек вектора начального и конечного направления равны:

 



Считаем, что лазерный сканер из начальной точки *A* совершил произвольные вращения и в некоторый момент времени оказался в точке *B* . Точка *B*1 – проекция точки *B* на дугу вращения вокруг оси *Oz.*

Угол между скрещивающимися прямыми *O*2*B* и *O*1*A* равен углу между прямыми *O*1*B*1 и *O*1*A* в силу того, что *O*1*A*, *O*1*B*1, *O*2*B* перпендикулярны оси *Oz*, а *OB’*, *OA’* являются проекциями этих прямых на плоскость *XOY*. Тогда



Мы можем записать

 

И цилиндрические координаты попадания лазерного луча равны:



 можно найти из формулы (\*) для декартовой системы координат.

***3. Сферическая система координат***

Рассмотрим сферическую систему координат . Будем считать, что лазер закреплён и движется так, как в декартовой и цилиндрической системах координат. Тогда координаты точек вектора начального и конечного направления равны:

 

Считаем, что вращение происходит в положительном направлении.

Пользуясь предыдущими соображениями из цилиндрической системы координат, получаем:

 

Нам остаётся выразить угол  через данные угловых смещений и компоненты вектора *h*.Для удобства сделаем замену:  и развернём нашу сферическую систему координат, как показано на рисунке. *A’*, *B’* – проекции точек *A*, *B* на ось *Oz*. *A’’*, *B’’* – проекции точек *A*, *B* на плоскость *XOY*.



Пусть:



Из рисунка 2 получаем:



Аналогично тому, как мы рассуждали о угле между скрещивающимися прямыми при оси *Oz* получаем для оси *Ox* :







Из (3) и (4) получаем:



Подставляя (1) и (5) в (2), получаем:



Приводим подобные:





Возводим в квадрат обе части:



Снова приводим подобные:



Делим обе части на :



Решая это уравнение как квадратное относительно  и сделав тривиальные преобразования, получим:



Итак,



Отсюда координаты точек попадания лазерного луча в сферической системе координат



Аналогично можно было выразить и через угловое смещение по *y*:



**Литература**

1. Каркищенко А.Н. Уточнение ориентации луча лазерного сканера при линейных и угловых колебаниях.

2. Мнухин В.Б. Лекции по аналитической геометрии.

3. Фирсов И. П. Конспект лекций по математическому анализу.

4. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Том 2.

5. Шафаревич И. Р., Ремизов А. О. Линейная алгебра и геометрия.